

ас-1
К-156
С-652

8

СОБРАНИЕ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ

СЕКЦІИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ

ОБЩЕСТВА ЕСТЕСТВОИСПЫТАТЕЛЕЙ

ПРИ

ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ТОМЪ 8-Й.

ЗАСѢДАНІЯ LXXXIX—CIII.

(Съ Мая 1889 по Сентябрь 1890 года).



КАЗАНЬ.
Типографія Императорскаго Университета.
1890.



СОБРАНИЕ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ

СЕКЦІИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ

ОБЩЕСТВА ЕСТЕСТВОИСПЫТАТЕЛЕЙ

ПРИ

ИМПЕРАТОРСКОМЪ КАЗАНСКОМЪ УНИВЕРСИТЕТѢ.

ТОМЪ 8-Й.

ЗАСѢДАНІЯ LXXXIX—CIII.

(Съ Мая 1889 по Сентябрь 1890 года).



КАЗАНЬ.

Типографія Императорскаго Университета.
1890.



QC

I

K-156

C-652

Печатано по опредѣленію Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ университетѣ.

Президентъ **А. Штукенбергъ.**



34-600/36

Содержаніе 8-го тома.

	Стр.
A) <i>Списокъ членовъ секціи въ сентябрь 1890 г. . . VI—XX</i>	
B) <i>Протоколы:</i>	
89-го засѣданія (25 мая 1889 г.) . . .	1—2
90-го — (16 сентября 1889 г.) . . .	2—3
81-го — (28 октября 1889 г.) . . .	53—56
92-го — (9 ноября 1889 г.) . . .	163—167
93-го — (25 ноября 1889 г.) . . .	195—196
94-го — (16 декабря 1889 г.) . . .	196—197
95-го — (27 января 1890 г.) . . .	198—202
96-го — (24 февраля 1890 г.) . . .	278—284
97-го — (4 марта 1890 г.) . . .	284—285
98-го — (23 марта 1890 г.) . . .	285—287
99-го — (28 апрѣля 1890 г.) . . .	287—290
100-го — (15 мая 1890 г.) . . .	344
101-го — (20 мая 1890 г.) . . .	345
102-го — (31 мая 1890 г.) . . .	345—346
103-го — (20 сентября 1890 г.) . . .	374—376
C) <i>Отчетъ секціи за 10-й 18⁸⁹/₉₀ годъ . . .</i>	<i>360—373</i>
D) <i>Сообщенія, помѣщенныя въ приложеніяхъ къ протоколамъ:</i>	
1) <i>А. П. Котельникова — „О давленіи жид-</i> <i>кой струи на клинъ“</i>	<i>4—51</i>

- 2) *Д. А. Гольдгаммера*— „Объ измѣненіи электропроводности металловъ при намагниченіи“ . . . 57—128
- 3) *И. П. Долбни*— „Аналогія между эллиптическими и тригонометрическими функціями“ . . . 129—144
- 4) *П. С. Назимова*— „О сходимости рядовъ, служащихъ интегралами дифференціальныхъ уравненій перваго порядка“ 145—161
- 5) *Г. Н. Шебуева*— „Случай движенія жидкости вдоль нагрѣтыхъ поверхностей“ 162—167
- 6) *Г. Н. Шебуева*— „Научные труды И. С. Громеки“ 168—180
- 7) *Д. А. Гольдгаммера*— „Работы И. С. Громеки по теоріи капиллярныхъ явленій“ 181—194
- 8) *Н. П. Слущина*— „О наблюденіяхъ земнаго магнетизма въ 1887 и 1888 годахъ, произведенныхъ въ магнитно-метеорологической обсерваторіи Императорскаго Казанскаго Университета“ . 203—221
- 9) *О. Д. Хвольсона*— „Объ одномъ частномъ случаѣ переменнаго тепловаго состоянія стержня“ . 222—231
- 10) *Г. А. Клейбера*— „О наилучшей ординатѣ въ интерполированіи по способу наименьшихъ квадратовъ“ 232—245
- 11) *Д. А. Гольдгаммера*— „Международный конгрессъ электриковъ въ Парижѣ съ 24-го по 31-е августа н. с. 1889 года“ 246—251
- 12) *И. П. Долбни*— „О псевдо-эллиптическихъ интегралахъ Абеля“ 252—277
- 13) *Д. М. Синцова*— „О функціяхъ Бернулли дробныхъ порядковъ“ 290—336
- 14) *И. И. Зелинскаго*— „Объ интегралѣ уравненія Рикатти“ 336—342

- 15) *Н. П. Слугинова*—„О температурѣ плавления“ 347—349
- 16) *Я. П. Корнухъ-Троицкаго* — „Вычисленіе возмущеній малой планеты Діаны для противостоянія августа 11-го 1890 года“ 350—359

Е) *Сообщенія, напечатанныя въ протоколахъ:*

- 1) *А. В. Васильева*—„Біографическія свѣдѣнія о В. П. Максимовичѣ“ 53—56
- 2) *А. В. Васильева*—„Некрологъ И. С. Громеки“ 163—166
- 3) *Н. П. Слугинова*—„О силѣ звука“ 279—282
- 4) *Н. А. Миславскаго* — „По поводу статьи г. Журавскаго „о рефракціи глаза“ 282—284
- 5) *А. Н. Кремлева* — „О ходѣ барометрическаго давленія въ Казани въ 1888-мъ и 1889-мъ годахъ“ 286
- 6) *А. Н. Кремлева*—„О новѣйшихъ работахъ по солнечной радіаціи“ 286—287
- 7) *Ф. М. Флавицкаго* — „Объ аллотропическихъ состояніяхъ серебра“ 288—289
- 8) *Н. П. Слугинова*—„Объ аллотропическихъ состояніяхъ серебра“ 289—290

Ф) *Прочія сообщенія, читанныя въ засѣданіи секціи.*

- 1) *И. П. Долбни*—„О простѣйшемъ способѣ образованія функціи $\sigma(u)$ и другихъ съ нею однородныхъ“ 1
- 2) *П. И. Свѣшниковъ*—„О построеніи изображеній въ преломляющихъ срединахъ“ 2

3) <i>О. Д. Хвольсона</i> —а) „Объ опредѣленіи зависимости теплопроводности отъ температуры“.	
б) „О распредѣленіи тепла въ цилиндрахъ“.	3
4) <i>П. С. Назимова</i> — „По поводу одной замѣтки Бертрана по теоріи вѣроятностей“	56
5) <i>Н. П. Казанкина</i> —„Замѣчаніе по поводу опредѣленія коэффиціента самоиндукціи“	197
6) <i>С. П. Орлова</i> —„О рѣшеніи уравненій 5-й степени $y^5 \pm y^3 = q$ съ помощью тригонометрическихъ таблицъ“	197
7) <i>Ф. М. Флавицкаго</i> —„Элементарный выводъ закона Авогадро-Ампера“	197
8) <i>Н. П. Слугинова</i> —„О звукопроводности“.	201
9) <i>П. П. Граве</i> —„Новый способъ изслѣдованія формулъ преломленія въ стеклахъ“	284
10) <i>А. В. Васильева</i> —„Чистая математика на VIII-мъ съѣздѣ русскихъ естествоиспытателей и врачей въ С.-Петербургѣ“	286
11) <i>В. А. Сикстеля</i> —„Объ Эвклидовомъ опредѣленіи прямой“	288
12) <i>И. П. Долбни</i> —„Розысканіе нормальныхъ періодовъ ультра-эллиптическихъ интеграловъ и опредѣленіе нулевыхъ точекъ функціи $\theta(u_1, u_2, \dots, u_p)$ отъ p нормальныхъ ультра-эллиптическихъ аргументовъ	345
13) <i>Н. П. Слугинова</i> — „Объ ареометрѣ для газовъ“	345
Демонстрированіе <i>Н. П. Слугиновымъ</i> , <i>Н. П. Казанкинымъ</i> , <i>К. В. Кебелемъ</i> и <i>К. М. Котеловымъ</i> новыхъ приборовъ физическаго кабинета и магнитной обсерваторіи.	1, 202, 287
Демонстрированіе фонографа Эдисона	344

G) *Текущая доля секции:*

- 1) Баллотированіе новыхъ членовъ. . 2, 195, 198, 278
- 2) Обсужденіе вопроса о передачѣ метеоро-
логическихъ станцій общества естествоиспытателей
въ вѣдѣніе главной физической обсерваторіи . . 196
- 3) Привѣтствія, посланныя Гамбургскому ма-
тематическому обществу и физико-экономическому
обществу въ Кенигсбергѣ по случаю ихъ юбилеевъ. 198—200
- 4) Обсужденіе проекта „Устава физико-мате-
матическаго общества при Императорскомъ Казан-
скомъ Университетѣ“ 278, 284

СПИСОКЪ ЧЛЕНОВЪ

СЕКЦІИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ

Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ
Казанскомъ Университетѣ

въ іюль 1890 г.

- 1) *Адамантовъ*, Дмитрій Леонтьевичъ, учитель 3-й гимназіи въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 2) *Адріановъ*, Василій Васильевичъ, учитель кадетскаго корпуса въ Ниж.-Новгородѣ (съ 1 мая 1888 г.).
- 3) *Александровъ*, Александръ Ивановичъ, учитель гимназіи въ Саратовѣ (съ 11 октября 1880 г.).
- 4) *Альбрехтъ*, Давыдъ Ивановичъ, инспекторъ студентовъ Казанскаго Универс. (съ 10 сент. 1888 г.).
- 5) *Андреевъ*, Михаилъ Кирилловичъ, учитель реального учил. въ Самарѣ (съ 24 сентября 1883 г.).
- 6) *Ардашевъ*, Александръ Александровичъ, кандидатъ физико-математ. наукъ въ Казани (съ 25 октября 1886 г.).
- 7) *Аристовъ*, Иванъ Николаевичъ, непремѣнный членъ губернскаго по крестьянскимъ дѣламъ присутствія въ Казани (съ 17 января 1887 г.).
- 8) *Багаевъ*, Александръ Антоновичъ, военный инженеръ въ Свеаборгѣ (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 9) *Блажеевскій*, Ромуальдъ Осиповичъ, приватъ доцентъ Казанск. универ. (съ 10 сентября 1888 г.).

- 10) *Бобровниковъ*, Николай Алексѣевичъ, учитель ино-
родческой учит. семин. въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 11) *Бобынинъ*, Викторъ Викторовичъ, приватъ-доцентъ
университета въ Москвѣ (съ 28 сентября 1885 г.).
- 12) *Богородицкій*, Василій Алексѣевичъ, профессоръ уни-
верситета въ Казани (съ 14 мая 1883 г.).
- 13) *Большагаринскій*, Владиміръ Константиновичъ,
учитель реального училища въ Выборгѣ (съ 29 сент. 1884 г.).
- 14) *Бравинъ*, Николай Александровичъ, учитель гим-
назіи въ Уфѣ (съ 24 сентября 1883 г.).
- 15) *Брюсовъ*, Евграфъ Ивановичъ, лаборантъ физической
лабораторіи Московскаго университета (съ 24 февр. 1890 г.).
- 16) *Васильевъ*, Александръ Васильевичъ, профес. уни-
верситета въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 17) *Вальтеръ*, Адамъ Яковлевичъ, учитель гимназіи въ
Астрахани (съ 30 сент. 1886 г.):
- 18) *Веретенниковъ*, Владиміръ Ивановичъ, учитель ре-
ального училища въ Казани (съ 6 февр. 1888 г.).
- 19) *Вильковискій*, Эммануилъ Яковлевичъ, учитель Ксе-
ніинской женской гимназіи въ Казани (съ 24 сент. 1883 г.).
- 20) *Виноградскій*, Владиміръ Николаевичъ, директоръ
реал. училища въ Астрахани (съ 24 сентября 1883 г.).
- 21) *Витковскій*, Василій Васильевичъ, полковникъ ге-
неральнаго Штаба въ С.-Петербургѣ (съ 29 октября 1883 г.).
- 22) *Вишневскій*, Гурій Матвѣевичъ, инспекторъ народ-
ныхъ училищъ въ Козьмодемьянскѣ (съ 29 сент. 1884 г.).
- 23) *Волковъ*, Михаилъ Сергѣевичъ, учитель 2-го реаль-
наго училища въ С.-Петербургѣ (съ 28 сент. 1885 г.).
- 24) *Галузевскій*, Иванъ Ивановичъ, кандидатъ матема-
тики въ Полтавѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 25) *Гезехусъ*, Николай Александровичъ, профессоръ
Технологич. Инстит. въ С.-Петерб. (съ 10 сент. 1888 г.).

- 26) *Генкель*, Августъ Августовичъ, директоръ реального училища въ Сарапулѣ (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 27) *Голубевъ*, Петръ Александровичъ, кандидатъ математики въ Томскѣ (съ 17 мая 1880 г.).
- 28) *Гольдгаммеръ*, Дмитрій Александровичъ, приватъ-доцентъ Казанск. уннвер. (съ 10 сентября 1888 г.).
- 29) *Горталовъ*, Александръ Петровичъ, кандидатъ математ. наукъ въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 30) *Де-Метизъ*, Георгій Георгіевичъ, приватъ доцентъ Новороссійскаго университета (съ 24 февраля 1890 г.).
- 31) *Дмитріевскій*, Михаилъ Михайловичъ, директоръ реальн. училища въ Перми (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 32) *Долбня*, Иванъ Петровичъ, учитель кадетскаго корпуса въ Ниж.-Новгородѣ (съ 1 мая 1888 г.).
- 33) *Доловъ*, Алексѣй Ѳедоровичъ, кандидатъ математ. наукъ (съ 13 апрѣля 1885 г.).
- 34) *Дубяго*, Дмитрій Ивановичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 29 окт. 1883 г.).
- 35) *Егоровъ*, Ѳедоръ Ивановичъ, преподаватель учительскаго института въ Москвѣ (съ 12 ноября 1888 г.).
- 36) *Жарковъ*, Николай Николаевичъ, военный инженеръ (съ 25 ноября 1889 г.).
- 37) *Жбиковскій*, Антонъ Ксаверьевичъ, учитель 1-й гимназіи въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 38) *Жилевичъ*, Антонъ Флоріановичъ, учитель реального училища въ Перми (съ 26 сентября 1887 г.).
- 39) *Жуковскій*, Николай Егоровичъ, профессоръ университета въ Москвѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 40) *Заибаловъ*, Борисъ Павловичъ, непремѣн. членъ присутств. по крестьян. дѣламъ въ Цивильскѣ (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 41) *Залезскій*, Владиміръ Андреевичъ, учитель реального училища въ Сарапулѣ (съ 24 октября 1883 г.).

42) *Здзярскій*, Антонъ Феликсовичъ, инженеръ путей сообщенія въ С.-Петербургѣ (съ 28 сент. 1885 г.).

43) *Зелинскій*, Иванъ Ивановичъ, учитель 2-й гимназіи въ Казани (съ 26 октября 1885 г.).

44) *Фонъ-Зиенъ-Корнъ*, Михаилъ Ксаверьевичъ, военный инженеръ въ Ташкентѣ (съ 15 апрѣля 1880 г.).

45) *Износковъ*, Иліодоръ Александровичъ, директоръ Казанск. реальн. учил. (съ 26 апрѣля 1882 г.).

46) *Имшеникъ*, Іосифъ Антоновичъ, директоръ 2-й гимназіи въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).

47) *Ицисонъ*, Карлъ, редакторъ „Математ. Библіотеки“ въ Берлинѣ (съ 28 сент. 1885 г.).

48) *Кадомцевъ*, Петръ Васильевичъ, преподаватель Новгородскаго реального училища (съ 27 января 1890 г.).

49) *Кадыкъ*, Петръ Христофоровичъ, учитель гимназіи въ Томскѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

50) *Казаковъ* Василій Владиміровичъ, учитель женской гимназіи въ Вяткѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

51) *Казанкинъ*, Николай Петровичъ, кандидатъ физико-математ. наукъ въ Казани (съ 26 окт. 1886 г.).

52) *Казинъ*, Борисъ Ниловичъ, канд. матем., инженеръ путей сообщенія (съ 27 января 1890 г.).

53) *Канонниковъ*, Иннокентій Ивановичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).

54) *Кебель*, Карлъ Веніаминовичъ, лаборантъ физич. кабинета университета въ Казани (съ 21 октября 1882 г.).

55) *Кирѣевъ*, Василій Ивановичъ, инспекторъ гимназіи въ Царицинѣ (съ 20 сентября 1880 г.).

56) *Кларкъ*, Николай Ивановичъ, преподаватель Нижне-Тагильскаго реального училища (съ 27 января 1890 г.).

57) *Клейбергъ*, Іосифъ Андреевичъ, приватъ-доцентъ университета въ С.-Петербургѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

58) *Ковальскій*, Александръ Маріановичъ, астрономъ-наблюдатель обсерваторіи университета въ Казани (съ 25 сентября 1882 г.).

59) *Колли*, Робертъ Андреевичъ, профессоръ Петровской Академіи въ Москвѣ (съ 4 апрѣля 1881 г.).

60) *Корнухъ - Троцкий*, Яковъ Петровичъ, помощникъ астронома-наблюдателя астрон. обс. Каз. унив. (съ 26 сентября 1887 г.).

61) *Котеловъ*, Константинъ Ивановичъ, кандидатъ математ. наукъ въ Казани (съ 6 февр. 1888 г.).

62) *Котельниковъ*, Александръ Петровичъ, преподаватель Ксеніинской женской гимназ. въ Каз. (съ 10 сентября 1888 г.).

63) *Котельникова*, Елизавета Петровна, учительница женской Ксеніинской гимназіи въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).

64) *Красновъ*, Иванъ Константиновичъ, чиновникъ въ-домства финансовъ въ Казани (съ 6 февр. 1888 г.).

65) *Кремлевъ*, Александръ Николаевичъ, кандидатъ математики (съ 27 января 1890 г.).

66) *Кривошеинъ*, Филиппъ Ивановичъ, учитель гимназіи въ Саратовѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

67) *Кривцовъ*, Яковъ Васильевичъ, архитекторъ въ Рязани (съ 24 сентября 1883 г.).

68) *Круликевичъ*, Эваристъ Эваристовичъ, канд. мат., инженеръ пут. сообщ. (съ 12 ноября 1888 г.).

69) *Кузнецкій*, Николай Васильевичъ, учитель сельскохозяйствен. училища на фермѣ близъ Казани (съ 20 сентября 1880 г.).

70) *Ленсъ*, Иванъ Андреевичъ, инспекторъ реального училища въ Казани (съ 13 апрѣля 1885 г.).

71) *Ливенъ*, Эмилій Павловичъ, помощникъ инспектора кадетскаго корпуса въ Ниж. Новгор. (съ 28 мая 1887 г.).

72) *Линдеманъ*, Эдуардъ Эдуардовичъ, ученный секретарь обсерваторіи въ Пулково (съ 25 сентября 1883 г.).

73) *Лишевъ*, Викторъ Александровичъ, артиллерійскій офицеръ въ Казани (съ 11 октября 1880 г.).

74) *Лобовиковъ*, Георгій Ивановичъ, учитель гимназіи въ Вязьмѣ (съ 29 сент. 1884 г.).

75) *Лобовиковъ*, Сергѣй Ивановичъ, учитель Астраханской гимн. (съ 8 окт. 1888 г.).

76) *Ломоносовъ*, Петръ Федоровичъ, учитель математики (съ 4 апрѣля 1880 г.).

77) *Лопаткинъ*, Михайлъ Ивановичъ, наблюдатель метеоролог. обсерваторіи университета въ Казани (съ 22 ноября 1886 г.).

78) *Лукницкій*, Всеволодъ Всеволодовичъ, начальникъ пороховаго завода въ Казани (съ 11 октября 1880 г.).

79) *Лючевъ*, Петръ Герасимовичъ, канд. мат. въ Баку (съ 12 ноября 1888 г.).

80) *Максимовичъ*, Сергѣй Павловичъ, инженеръ путей сообщенія въ С.-Петербургѣ (съ 34 сентября 1883 г.).

81) *Максимовъ*, Николай Андреевичъ, учитель татарской учительской школы въ Казани (съ 29 октября 1883 г.).

82) *Малешевскій*, Болеславъ Ѳомичъ, главный контролеръ юго-запад. жел. дорогъ въ С.-Петербургѣ (съ 6 февр. 1888 г.).

83) *Мальцевъ*, Михайлъ Михайловичъ, учитель учительскаго института въ Казани (съ 17 мая 1880 г.).

84) *Мальцевъ*, Александръ Михайловичъ, учитель гимназіи въ Царицынѣ (съ 29 октября 1883 г.).

85) *Мещерскій*, Иванъ Всеволодовичъ, консерваторъ кабинета практич. механики въ С.-Петербург. университетѣ (съ 28 мая 1888 г.).

- 86) *Милославская*, Александра Ивановна, учительница женской прогимназіи въ Глазовѣ (съ 28 апрѣля 1884 г.).
- 87) *Мининъ*, Александръ Петровичъ, преподаватель 2-й женской гимназіи въ Москвѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 88) *Мининъ*, Викторъ Петровичъ, преподаватель 3-й мужской гимназіи въ Москвѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 89) *Миславскій*, Николай Александровичъ, прозекторъ Физіолог. Каб. Каз. унив. (съ 8 октября 1888 г.).
- 90) *Михайловъ*, Петръ Александровичъ, учитель реального училища въ Елабугѣ (съ 21 октября 1882 г.).
- 91) *Михельсонъ*, Владиміръ Александровичъ, приватъ-доцентъ Московскаго университета (съ 24 февр. 1890 г.).
- 92) *Міончинскій*, Тимофей Андреевичъ, офицеръ Артиллер. Акад. (съ 12 ноября 1888 г.).
- 93) *Мокроусовъ*, Василій Семеновичъ, кандидатъ математики (съ 20 декабря 1886 г.).
- 94) *Назимовъ*, Петръ Сергѣевичъ, професоръ Казанскаго университета (съ 16 сентября 1889 г.).
- 95) *Неклюдовъ*, Сергѣй Михайловичъ, членъ Совѣта дворянскаго банка въ С.Петербургѣ (съ 22 окт. 1886 г.).
- 96) *Некрасовъ*, Владиміръ Леонидовичъ, кандидатъ математики въ Казани (съ 6 февраля 1888 г.).
- 97) *Нечаевъ*, Николай Владиміровичъ, учитель 1-й гимназіи въ Казани (съ 17 мая 1880 г.).
- 98) *Никоновъ*, Петръ Павловичъ, учитель женской гимназіи въ Вяткѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 99) *Обуховъ*, Дмитрій Григорьевичъ, учитель реального училища въ Вяткѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 100) *Орловъ*, Сергѣй Павловичъ, лекторъ англ. яз. при университетѣ въ Казани (съ 26 ноября 1883 г.).
- 101) *Охотниковъ*, Никифоръ Михайловичъ, учитель чувашскаго училища въ Симбирскѣ (съ 23 ноября 1885 г.).

102) *Павленко*, Варлаамъ Павловичъ, учитель 2-го кадетскаго корпуса въ С.-Петербургѣ (съ 29 сент. 1884 г.).

103) *Павловъ*, Александръ Петровичъ, учитель женской гимназіи въ Екатеринбургѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

104) *Пактовскій*, Иванъ Гавриловичъ, учитель учительской семинаріи въ Бирскѣ (съ 11 декабря 1882 г.).

105) *Пантелѣевскій*, Александръ Никитичъ, инспекторъ реал. училища въ Вяткѣ (съ 30 апрѣля 1883 г.).

106) *О. Первушинъ*, Іоаннъ Михѣевичъ, священникъ Шадринск. уѣзда Пермск. губ. (съ 11 марта 1889 г.).

107) *Пермяковъ*, Сергѣй Ефремовичъ, кандидатъ матем. наукъ (съ 29 сент. 1884 г.).

108) *Перуанскій*, Александръ Аѳанасіевичъ, учитель реального училища въ Астрахани (съ 18 апрѣля 1887 г.).

109) *Перуанскій*, Константинъ Аѳанасьевичъ, преподаватель реального училища въ Сызрани (съ 27 янв. 1890 г.).

110) *Перцовъ*, Петръ Петровичъ, уѣздный предводитель дворянства въ Казани (съ 1 мая 1888 г.).

111) *Покровскій*, Александръ Николаевичъ, учитель гимназіи въ Костромѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

112) *Покровскій*, Василій Васильевичъ, учитель Введенской гимназіи въ С.-Петербургѣ (съ 28 мая 1888 г.).

113) *Покровскій*, Петръ Михайловичъ, приватъ доцентъ Моск. унив. (съ 12 ноября 1888 г.).

114) *Полетика*, Петръ Романовичъ, учитель гимназіи въ Саратовѣ (съ 30 сент. 1886 г.).

115) *Пономаревъ*, Дмитрій Григорьевичъ, учитель женской гимназіи въ Самарѣ (съ 29 сент. 1884 г.).

116) *Порфирьевъ*, Николай Ивановичъ, кандидатъ физико-математ. наукъ въ Казани (съ 30 сент. 1886 г.).

117) *Портыкинъ*, Платонъ Сергѣевичъ, докторъ астрономіи, въ Городнѣ Черниг. губ. (съ 17 мая 1880 г.).

- 118) *Постниковъ*, Модестъ Васильевичъ, учитель гимназіи въ Астрахани (съ 23 ноября 1885 г.).
- 119) *Потановъ*, Николай Гавриловичъ, попечитель Казанскаго учебнаго округа (съ 27 апрѣля 1885 г.).
- 120) *Преображенскій*, Владиміръ Васильевичъ, профессоръ Новороссійск. унив. (съ 27 окт. 1884 г.).
- 121) *Преображенскій*, Петръ Васильевичъ, учитель 4-й гимназіи въ Москвѣ (съ 28 сент. 1885 г.).
- 122) *Пташникій*, Иванъ Львовичъ, приватъ доцентъ С.-Петербургскаго университета (съ 27 января 1890 г.).
- 123) *Пушковъ*, Николай Михайловичъ, учитель прогимназіи въ Алатырѣ (съ 24 сентября 1883 г.).
- 124) *Ренчикій*, Степанъ Дмитріевичъ, директоръ реального училища въ станицѣ Урюпинской, въ землѣ войска донскаго (съ 6 февр. 1888 г.).
- 125) *Рейнгардтъ*, Николай Викторовичъ, присяжн. поверенный въ Казани (съ 17 мая 1880 г.).
- 126) *Рожанскій*, Василій Михайловичъ, учитель инородческой учит. семин. въ Казани (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 127) *Россевичъ*, Юлій Николаевичъ, артиллерійскій офицеръ въ С.-Петербурѣ (съ 30 апрѣля 1883 г.).
- 128) *Рышетинъ*, Николай Лаврентьевичъ, военный инженеръ (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 129) *Рябининъ*, Петръ Николаевичъ, учитель реального училища въ Вяткѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 130) *Салинъ*, Генрихъ Андреевичъ, учитель 3-й гимназіи въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 131) *Свенцицкій*, Михаилъ Іосифовичъ, податной инспекторъ въ Казани (съ 26 окт. 1885 г.).
- 132) *Свѣшниковъ*, Павелъ Ивановичъ, учитель гимназіи въ Троицкѣ, Оренб. губ. (съ 26 сентября 1887 г.).

133) *Сечель*, Михайлъ Соломоновичъ, кандидатъ матем. наукъ въ Казани (съ 25 сентября 1882 г.).

134) *Селивановъ*, Дмитрій Ѳедоровичъ, приватъ-доцентъ С.-Петербургскаго университета (съ 28 января 1890 г.).

135) *Сергѣевъ*, Михайлъ Порфирьевичъ, кандидатъ математики (съ 15 апрѣля 1880 г.).

136) *Сикстель*, Владиміръ Александровичъ, преподаватель Оренбургскаго кадетскаго корпуса (съ 25 нояб. 1890 г.).

137) *Скалозубовъ*, Иванъ Лукичъ, канд. мат. въ Казани (съ 12 ноября 1888 г.).

138) *Славолюбовъ*, Павелъ Николаевичъ, учитель гимназіи въ Вяткѣ (съ 16 сентября 1889 г.).

139) *Сластниковъ*, Семенъ Ивановичъ, кандидатъ математики въ Казани (съ 20 сентября 1880 г.).

140) *Слушиновъ*, Николай Петровичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 25 окт. 1886 г.).

141) *Смирновъ*, Антонинъ Андреевичъ, учитель гимназіи въ Самарѣ (съ 25 окт. 1886 г.).

142) *Смирновъ*, Евгеній Александровичъ, кандидатъ матем. наукъ, въ Иркутскѣ (съ 30 апрѣля 1883 г.).

143) *Соколовъ*, Василій Львовичъ, преподаватель Архангельск. Семинаріи (съ 12 ноябр. 1888 г.).

144) *Соколовъ*, Дмитрій Михайловичъ, инженеръ путей сообщенія (съ 27 января 1890 г.).

145) *Соловьевъ*, Аркадій Матвѣевичъ, учитель реал. училища въ Вольскѣ (съ 17 мая 1880 г.).

146) *Старковъ*, Алексѣй Петровичъ, въ Одессѣ (съ 29 сентября 1884 г.).

147) *Стефановичъ*, Яковъ Аполлоновичъ, учитель учительскаго института въ Казани (съ 26 апрѣля 1882 г.).

148) *Стрекаловъ*, Викторъ Николаевичъ, учитель 2-го кадетск. корпуса въ С.-Петербургѣ (съ 23 нояб. 1885 г.).

- 149) *Суворовъ*, Ѳедоръ Матвѣевичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 150) *Сумцовъ*, Владиміръ Николаевичъ, канд. мат. въ Казани (съ 10 сент. 1888 г.).
- 151) *Тлушиковскій*, Леонидъ Викентьевичъ, канд. мат. въ Казани (съ 8 окт. 1888 г.).
- 152) *Толмачевъ*, Николай Александровичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 26 сентября 1887 г.).
- 153) *Толузаковъ*, Василій Васильевичъ, преподаватель Оренбургской мужской гимназіи (съ 27 января 1890 г.).
- 154) *Тороповъ*, Константинъ Александровичъ, учит. гимн. въ Перми (съ 12 ноябр. 1888 г.).
- 155) *Ульянинъ*, Всеволодъ Александровичъ, докторъ Страсбургскаго университета, лаборантъ физической лабораторіи Московскаго университета (съ 24 февраля 1890 г.).
- 156) *Фалинъ*, Ѳедоръ Николаевичъ, военный инженеръ въ Нижнемъ-Новгородѣ (съ 26 сентября 1887 г.).
- 157) *Федоровъ*, Евгеній Степановичъ, военный инженеръ въ С.-Петербур. (съ 15 апрѣля 1880 г.).
- 158) *Флавицкій*, Флавіанъ Михайловичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).
- 159) *Фроловъ*, Михайлъ Михеевичъ, инженеръ-генераль въ С.-Петербургѣ (съ 26 апр. 1886 г.).
- 160) *Халтулари*, Викторъ Константиновичъ, инспекторъ кадетскаго корпуса въ Ниж. Новгородѣ (съ 28 мая 1888 г.).
- 161) *Хвольсонъ*, Орестъ Даниловичъ, членъ ученаго комитета министер. народн. просв. (съ 16 сентября 1890 г.).
- 162) *Хижняковъ*, Михайлъ Прокофьевичъ, учитель гимназіи въ Самарѣ (съ 13 декабря 1880 г.).
- 163) *Хохряковъ*, Яковъ Андреевичъ, учитель реального училища въ Сарапулѣ (съ 26 сентября 1887 г.).

164) *Цомакіонъ*, Анна Ивановна, учительница математики, (съ 17 февраля 1883 г.).

165) *Чеховичъ*, Карлъ Андреевичъ, окружный инспекторъ Оренбургскаго учебнаго округа (съ 25 ноября 1890 г.).

166) *Чилирь*, Генрихъ Игнатьевичъ, учитель маріинской гимназіи въ Казани (съ 25 сент. 1882 г.).

167) *Шанторинъ*, Василій Григорьевичъ, инспекторъ гимназіи въ Екатеринодарѣ (съ 4 апрѣля 1880 г.).

168) *Шебуевъ*, Георгій Николаевичъ, учитель реального училища въ Казани (съ 4 апрѣля 1880 г.).

169) *Ширковъ*, Алексѣй Петровичъ, учитель кадетскаго корпуса въ Ниж. Новгородѣ (съ 1 мая 1888 г.).

170) *Ширяевъ*, Владиміръ Александровичъ, губерн. землемѣръ въ Казани (съ 25 февраля 1884 г.).

171) *Шиффъ*, Вѣра Осиповна, преподавательница математики на высшихъ женскихъ курсахъ въ С. - Петербургѣ (съ 27 января 1890 г.).

172) *Шнейдеръ*, Яковъ Григорьевичъ, ветеринарный врачъ (съ 17 мая 1880 г.).

173) *Шулинскій*, Александръ Михайловичъ, учитель гимназіи въ Ташкентѣ (съ 25 сентября 1882 г.).

174) *Щепанскій*, Іосифъ Александровичъ, преподаватель Самарскаго реального училища (съ 27 января 1890 г.).

175) *Эккерманъ*, Александръ Христіановичъ, учит. маріинской женской гимназіи въ Казани (съ 17 февраля 1883 г.).

176) *Энгельгартъ*, Василій Павловичъ, астрономъ въ Дрезденѣ (съ 23 февраля 1885 г.).

177) *Якимовъ*, Владиміръ Петровичъ, учитель гимназіи въ Екатеринбургѣ (съ 30 сент. 1886 г.).

178) *Якобій*, Аркадій Ивановичъ, профессоръ университета въ Казани (съ 23 ноября 1885 г.).

179) *Янишевскій*, Ерастъ Петровичъ, докторъ математики (съ 17 мая 1880 г.).

- 180) *Янишевскій*, Николай Ерастовичъ, кандидатъ физи-
ко-математ. наукъ въ Казани (съ 25 окт. 1886 г.).
- 181) *Федоровъ*, Поліевъ Федоровичъ, учитель Краснояр-
ской гимназіи (съ 25 ноября 1889 г.).
- 182) *Федотченко*, Александръ Федоровичъ, учитель гим-
назіи въ Симбирскѣ (съ 13 декабря 1880 г.).
- 183) *Шевелевъ*, Георгій Николаевичъ, учитель реальна-
го училища въ Казани (съ 4 января 1880 г.).
- 184) *Шевелевъ*, Александръ Петровичъ, учитель кадетскаго
училища въ Ниж. Новгороде (съ 1 мая 1888 г.).
- 185) *Шевелевъ*, Владиміръ Александровичъ, учитель зем-
ледельческаго училища въ Казани (съ 25 февраля 1884 г.).
- 186) *Шевелевъ*, Вера Осиповна, преподавательница мате-
матикъ на Высшихъ женскихъ курсахъ въ С.-Петербургѣ
(съ 27 января 1890 г.).
- 187) *Шевелевъ*, Яковъ Григорьевичъ, ветеринарный
врачъ (съ 17 мая 1880 г.).
- 188) *Шевелевъ*, Александръ Михайловичъ, учитель
гимназіи въ Ташкентѣ (съ 25 сентября 1882 г.).
- 189) *Шевелевъ*, Іосифъ Александровичъ, преподаватель
Самарскаго реальнаго училища (съ 27 января 1890 г.).
- 190) *Шевелевъ*, Александръ Христофоровичъ, учитель мари-
нскон женской гимназіи въ Казани (съ 17 февраля 1883 г.).
- 191) *Шевелевъ*, Василий Павловичъ, астрономъ въ
Дрезденѣ (съ 23 февраля 1885 г.).
- 192) *Шевелевъ*, Владиміръ Петровичъ, учитель гимназіи
въ Екатеринбургѣ (съ 30 сент. 1886 г.).
- 193) *Шевелевъ*, Аркадій Павловичъ, профессоръ универ-
ситета въ Казани (съ 23 ноября 1885 г.).
- 194) *Шевелевъ*, Ерастъ Петровичъ, докторъ матема-

1-й выпускъ 8-го тома
собранія протоколовъ
секціи физико-матема-
тическихъ наукъ въ Ка-
зани. (Засѣданія 89-е
и 90-е.)

Протоколъ 89-го засѣданія

25 Мая 1889 года.

(Въ засѣданіи присутствовали 12 членовъ и 5 постороннихъ лицъ).

I. А. В. Васильевъ изложилъ содержаніе сообщеній, присланныхъ И. П. Долбней: а) объ аналогіи между эллиптическими и тригонометрическими функціями; б) о простѣйшемъ способѣ образованія функціи $\sigma(u)$ и другихъ съ нею однородныхъ.

II. Н. П. Слугиновъ сообщилъ краткій очеркъ о дѣятельности магнитнометеорологической обсерваторіи въ 1888 году. Въ этомъ году М. С. Сегелемъ и докладчикомъ были опредѣлены постоянныя магнитныхъ приборовъ. Непрерывно наблюдались только два элемента земнаго магнетизма: горизонтальная составляющая и деклинація и сдѣлано два опредѣленія инклинаціи. Лѣтомъ инклинація оказалась равною $68^{\circ} 34,5'$. Средняя годовая величина деклинаціи восточной есть $7^{\circ} 13' 42''$. Восточная деклинація увеличивается; величина приращенія въ годъ около $3'$. Варіаціи деклинаціи и горизонтальной составляющей наблюдаются три раза въ сутки: въ 7h, 1h, 9h. Minimum деклинаціи въ 1h. Абсолютная величина горизонтальной составляющей около 1,86 ед. Гаусса.

Въ заключеніе Н. П. Слугиновъ показалъ приборы, изготовленные для магнитной обсерваторіи Эдельманномъ въ

Мюнхенѣ; это три варіаціонные прибора типа Ллойдъ-Гаусса, новой конструкціи академика Вильда: унифиляръ для деклинаціи, бифиляръ для горизонтальной составляющей и Ллойдовы вѣсы для вертикальной составляющей, затѣмъ 2 гальванометра для земныхъ токовъ. Кромѣ того были показаны 4 трубы со шкалами, снабженными плоскими зеркалами для освѣщенія.

Предсѣдатель Секціи *А. Васильевъ*.

Секретарь Секціи *М. Сегель*.

Протоколъ 90-го засѣданія,

16 Сентября 1889 года.

(Въ засѣданіи присутствовали 25 членовъ и около 30 постороннихъ лицъ).

I. По предложенію *А. В. Васильева*, *Н. П. Слугинова*, *Д. И. Дубяго* и *М. С. Сегеля* единогласно избраны въ члены секціи:

186) *Хвольсонъ, Орестъ Даниловичъ*, докторъ физики, членъ ученаго комитета министерства народнаго просвѣщенія, профессоръ техническаго училища почтово-телеграфнаго вѣдомства.

177) *Назимовъ, Петръ Сергѣевичъ*, профессоръ казанскаго университета.

178) *Славолюбовъ, Павелъ Николаевичъ*, преподаватель гимназіи въ Вяткѣ.

II. *А. П. Котельниковъ* сдѣлалъ сообщеніе „о давленіи жидкой струи на клинъ.“ Сообщеніе печатается въ приложеніи къ этому протоколу.

III. *Н. П. Казанкинъ* вкратцѣ изложилъ содержаніе присланнаго *П. И. Свѣшниковымъ* сообщенія „о построеніи

изображеній въ преломляющихъ срединахъ.“ Сообщение это напечатано въ Journal de mathém. élémentaires, 1889, № 7 и представляетъ—по словамъ докладчика--изложение извѣстныхъ уже для этого случая построеній въ измѣненномъ видѣ.

IV. О. Д. Хвольсонъ сдѣлалъ сообщенія: а) объ опредѣленіи зависимости теплопроводности отъ температуры; б) о распредѣленіи тепла въ цилиндрахъ.

Предсѣдатель Секціи А. Васильевъ.

Секретарь Секціи М. Сегель.

Въ списокѣ членовъ секціи, приложенномъ къ 7-му тому собранія протоколовъ, не указанъ по недосмотру адресъ члена секціи П. С. Порѣцкаго; исправляя здѣсь этотъ недосмотръ, сообщаю мѣсто жительства П. С. Порѣцкаго: городъ Городня, Черниговской губ.

Секретарь Секціи М. Сегель.

Президент А. Шмукенберг.

Наша работа посвящена изложению Однородных Экспериментальных при

данных Метерского (только здесь вместо α стоит β).

Эти формулы при $\alpha = \beta = \gamma = 1$ представляют формулы

$$P = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\pi^2 \cos^2(\pi - \theta)}{\sin^2 \theta} \right)$$

то значение P будет

$$P = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\pi^2 \cos^2(\pi - \theta)}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\pi^2 \cos^2(\pi - \theta)}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\pi^2 \cos^2(\pi - \theta)}{\sin^2 \theta} \right)$$

данный по предположению θ . Так, если положить

иногда мы можем выбрать θ произвольно, и тогда P опре-

делит между величинами P и θ . Снова потому θ дан-

$$P = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\pi^2 \cos^2(\pi - \theta)}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\pi^2 \cos^2(\pi - \theta)}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\pi^2 \cos^2(\pi - \theta)}{\sin^2 \theta} \right)$$

мы получим только одно θ .

интервал $(\cos^2 \theta + \cos^2 \theta)$ (для того чтобы θ не было $\pi/2$),

иногда не получается из последнего θ и θ (сд) мно-

АНАЛОГІЯ МЕЖДУ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦІЯМИ.

Сообщеніе И. П. ДОЛБНИИ,

читанное 25-го Мая 1889 г. въ 89-мъ засѣданіи Физико-Математ. Секціи
Общ. Естествоиспытателей при Имп. Каз. Унив.

§ 1. Предложимъ себѣ разыскать трансцендентныя функціи φu и τu , удовлетворяющія уравненію

$$\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2(u)\tau^2(a)} = \varphi(a) - \varphi(u) \dots \dots (1).$$

Будемъ различать два случая: 1) когда $\varphi(u)$ обладаетъ двумя періодами (дѣйствительнымъ 2ω и мнимымъ $2\omega'$) и 2) когда $\varphi(u)$ обладаетъ однимъ дѣйствительнымъ періодомъ 2ω .

Первый случай. Положимъ, что $\tau(u)$ голоморфная функція во всей координатной плоскости.

Пусть

$$\varphi(u+2\omega) = \varphi(u), \quad \varphi(u+2\omega') = \varphi(u).$$

Перемѣщая въ (1) буквы a и u , получимъ:

$$\frac{\tau(u+a)\tau(a-u)}{\tau^2(u)\tau^2(a)} = \varphi(u) - \varphi(a) \dots \dots (2).$$

Сравнивая (1) съ (2), убѣждаемся, что

$$\tau(a-u) = -\tau(u-a), \quad \text{т. е.} \\ \tau(-Z) = -\tau(Z).$$

Отсюда слѣдуетъ, что $\tau(u)$ нечетная функція аргумента u .

Положимъ

$$\lim(u-a) = 0, \text{ тогда}$$

$$\lim \left[\frac{\tau(u+a) \cdot \tau(u-a)}{\tau^2(u) \tau^2(a)} \right]_{u=a} = 0,$$

слѣдовательно

$$\lim [\tau(u-a)]_{u=a} = 0, \text{ т. е.}$$

$$\tau(0) = 0.$$

Полагая

$$u = a + 2m\omega,$$

гдѣ m число цѣлое, имѣемъ

$$\frac{\tau(2a+2m\omega) \tau(2m\omega)}{\tau^2(a+2m\omega) \tau^2(a)} = 0 \dots\dots (3).$$

Такъ какъ $\tau(u)$ есть голоморфная функція для всей координатной плоскости, то изъ уравненія (3) получимъ

$$\tau(2m\omega) = 0.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ

$$\tau(2m'\omega') = 0;$$

слѣдовательно всѣ нули функціи $\tau(u)$ заключаются въ формулѣ

$$u = 2m\omega + 2m'\omega' \dots\dots (4),$$

гдѣ m и m' числа цѣлыя, произвольныя.

Изъ уравненія (1) имѣемъ

$$\frac{\tau(u+a)}{\tau^2 u \tau^2 a} \cdot \frac{\tau(u-a)}{u-a} = - \frac{\varphi(u) - \varphi(a)}{u-a}.$$

Полагая здѣсь

$$\lim(u-a) = 0,$$

а также имѣя въ виду, что обѣ функціи $\tau(u)$ и $\varphi(u)$ должны обладать производными, получимъ

$$\frac{\tau(2u)}{\tau^4(u)} \cdot \tau'(0) = -\varphi'(u).$$

Постоянная $\tau(0)$ неопредѣлена никакими условіями; возьмемъ поэтому

$$\tau'(0) = 1, \text{ тогда}$$

$$\varphi'(u) = -\frac{\tau(2u)}{\tau^4(u)} \cdot \dots \dots (5).$$

Отсюда между прочимъ слѣдуетъ, что разложеніе голоморфной функціи $\tau(u)$ въ безконечный рядъ по возрастающимъ степенямъ аргумента начнется членомъ u и будетъ вида

$$\tau(u) = u + \alpha_1 u^3 + \alpha_2 u^5 + \dots \dots (6).$$

§ 2. Легко убѣдиться, что безконечности функціи $\varphi'(u)$ суть совмѣстныя рѣшенія уравненій

$$\tau(2u) = 0 \text{ и } \tau^4(u) = 0.$$

Значитъ $\varphi'(u)$ обращается въ безконечность для всѣхъ значеній аргумента, опредѣляемыхъ формулой

$$u = m\omega + m'\omega',$$

гдѣ m и m' числа четныя.

Нули функціи $\varphi'(u)$ получатся, если рѣшить уравненіе

$$\tau(2u) = 0$$

совмѣстно съ неравенствомъ:

$$\tau(u) \text{ неравно нулю.}$$

Отсюда слѣдуетъ, что корни уравненія:

$$\varphi'(u) = 0$$

опредѣляются формулой

$$u = (2m + 1)\omega + (2m' + 1)\omega',$$

гдѣ m и m' числа цѣлыя произвольныя.

Итакъ внутри элементарнаго параллелограмма $(2\omega, 2\omega')$ функція $\varphi'(u)$ имѣетъ три нуля:

$$\omega, \omega', \omega + \omega' = \omega''$$

и одну безконечность

$$u = 0.$$

Легко удостовѣриться, что безконечность эта третьяго порядка. Въ самомъ дѣлѣ изъ формулы

$$\varphi'(u) = -\frac{\tau(2u)}{\tau^4(u)}$$

видно, что при безконечно маломъ u главный членъ въ разложеніи $\varphi'(u)$ по возрастающимъ степенямъ аргумента есть

$$-\frac{2u}{u^4} = -\frac{2}{u^3}.$$

Итакъ $\varphi(u)$ есть мероморфная двояко-періодическая функція третьяго порядка.

§ 3. Дѣлая въ уравненіи (1) $\lim u = 0$, найдемъ, что главный членъ въ разложеніи первой части уравненія будетъ $\frac{1}{u^2}$, а потому

$$\lim_{u=0} [\varphi(u)] = \infty.$$

Поэтому всѣ безконечности $\varphi(u)$ заключаются въ формулѣ

$$u = 2t\omega + 2t'\omega',$$

гдѣ t и t' числа цѣлыя произвольныя. Внутри элементарнаго параллелограмма $(2\omega, 2\omega')$ функція $\varphi(u)$ имѣетъ только одну безконечность

$$u = 0.$$

и эта бесконечность второго порядка. Отсюда слѣдуетъ, что $\varphi(u)$ имѣетъ два нуля внутри того же параллелограмма ⁽¹⁾.

Ясно поэтому, что $\varphi(u)$ есть функция мероморфная, двояко-периодическая, второго порядка ⁽²⁾.

Назовемъ

$$\varphi(\omega) = l_1, \quad \varphi(\omega'') = l_2, \quad \varphi(\omega') = l_3;$$

рассмотримъ свойства разностей

$$\varphi(u) - l_1, \quad \varphi(u) - l_2, \quad \varphi(u) - l_3.$$

Разность $(\varphi u - l_1)$ обращается въ нуль аргументомъ

$$u = \omega.$$

То же значеніе аргумента обращаетъ въ нуль функцію

$$\frac{d}{du}(\varphi u - l_1),$$

а потому разность

$$\varphi(u) - l_1$$

имѣетъ внутри параллелограма $(2\omega, 2\omega')$ одинъ нуль $u = \omega$, и этотъ нуль второго порядка. Ясно, кромѣ того, что

$$\varphi(u) - l_1$$

имѣетъ бесконечность второго порядка

$$u = 0.$$

На этомъ основаніи произведемъ

$$[\varphi(u) - l_1] [\varphi(u) - l_2] [\varphi(u) - l_3] \dots \dots (7)$$

⁽¹⁾ Briot et Bouquet, «Théorie des fonctions elliptiques» 1875, p. 241.

⁽²⁾ Ibid. p. 197.

имѣть три двукратныхъ нуля

$$u = \omega, u = \omega', u = \omega + \omega'$$

и одну безконечность

$$u = 0$$

шестого порядка, а потому произведение (7) есть мероморфная функція шестого порядка.

Тѣми же нулями и тѣми же безконечностями обладаетъ функція

$$[\varphi'(u)]^2,$$

а потому

$$(\varphi u')^2 = A(\varphi u - l_1)(\varphi u - l_2)(\varphi u - l_3),$$

гдѣ A постоянная величина ⁽¹⁾, равная 4.

§ 5. Сложеніе аргументовъ. Позволяю себѣ, пользуясь случаемъ, изложить новый пріемъ сложенія аргументовъ для функціи $\varphi(u)$.

Изслѣдуемъ мероморфную, двояко-періодическую функцію

$$A = \left(\frac{\varphi' u - \varphi' r}{\varphi u - \varphi r} \right)^2 \dots \dots (9).$$

Легко видѣть, что A обращается въ ∞ для $u = 0$. Если $\lim u = 0$, то главный членъ разложенія A будетъ

$$\left(-\frac{2}{u^3} : \frac{1}{u^2} \right)^2 = \frac{4}{u^4}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что A должно быть вида

$$A = 4\varphi u + B,$$

гдѣ B не обращается въ безконечность для $u = 0$.

⁽¹⁾ Ibid. p. 242.

Функция A еще разъ обращается въ ∞ для $u = -r - \varepsilon$, гдѣ $\lim \varepsilon = 0$. Дѣлая $u = -r - \varepsilon$, видимъ, что главный членъ въ разложеніи A будетъ

$$\frac{4\varphi'^2 r}{\varepsilon^2 \varphi'^2 r} = \frac{4}{\varepsilon^2},$$

слѣдовательно B должно быть вида

$$B = 4\varphi(u + r) + 4C,$$

а потому

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\varphi' u - \varphi' r}{\varphi u - \varphi r} \right)^2 = \varphi(u) + \varphi(u + r) + C.$$

Ясно, что A обращается въ ∞ для $\lim r = 0$, а потому

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\varphi' u - \varphi' r}{\varphi(u) - \varphi(r)} \right)^2 = \varphi u + \varphi r + \varphi(u + r) + D,$$

гдѣ D есть двояко-періодическая функція, не обращающаяся въ безконечность, т. е. постоянная величина ⁽¹⁾.

Для опредѣленія постоянной D положимъ

$$u = \omega, \quad r = \omega', \quad \text{тогда}$$

$$\varphi(\omega) = l_1, \quad \varphi(\omega') = l_2, \quad \varphi(\omega + \omega') = l_3,$$

и мы получимъ

$$D = -(l_1 + l_2 + l_3).$$

И такъ окончательно

$$\varphi(u + r) + \varphi u + \varphi r = \frac{1}{4} \left(\frac{\varphi' u - \varphi' r}{\varphi u - \varphi r} \right)^2 + (l_1 + l_2 + l_3).$$

Выбирая l_1, l_2, l_3 такъ, что

$$l_1 + l_2 + l_3 = 0,$$

⁽¹⁾ Briot et Bouquet, «Théorie des fonctions elliptiques» p. 203, 236, 1875.

приходимъ къ функціи $p(u)$ Weierstrass'a, опредѣляемой дифференціальнымъ уравненіемъ

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 p u - g_3.$$

Примѣнительно къ этой функціи имѣемъ

$$p(u+r) + pu + pr = \frac{1}{4} \left(\frac{p'u - p'r}{pu - pr} \right)^2 \dots (10).$$

Изъ предыдущаго анализа вытекаетъ слѣдствіе большой важности. Нули функціи

$$A = \frac{1}{4} \left(\frac{p'u - p'r}{pu - pr} \right)^2$$

найдутся изъ уравненія

$$p'u - p'r = 0 \dots (11).$$

Имѣемъ

$$\begin{aligned} p'^2 u - p'^2 r &= (p'u + p'r)(p'u - p'r) = \\ &= 4(p^3 u - p^3 r) - g_2(pu - pr) = \\ &= 4(pu - pr)(p^2 u - p^2 r + p^2 r - \frac{g_2}{4}) = 0 \dots (12). \end{aligned}$$

Корни этого уравненія суть

$$u = \pm r, \quad u = \pm u_1, \quad u = \pm u_2.$$

Ясно, что

$$p(u_1) + p(u_2) = -pr.$$

Дѣлая $u = r$, получимъ

$$A = \frac{1}{4} \left(\frac{p''r}{p'r} \right)^2.$$

Дѣлая $u = -r$, получимъ $A = \infty$.

Слѣдовательно нули A будутъ

$$u = \pm u_1, \quad u = \pm u_2.$$

Если $u = u_1$, $u = u_2$ суть корни разности $p'u - p'r$, то $u = -u_1$, $u = -u_2$ будутъ корнями суммы $p'u + p'r$, и наоборотъ. Положимъ, что корни разности $p'u - p'r = 0$ суть

$$u = u_1, \quad u = u_2.$$

Тогда, полагая въ (10) $u = u_1$, $r = u_2$, получимъ

$$p(u_1 + u_2) + pu_1 + pu_2 = 0,$$

$$p(u_1 + u_2) = pr,$$

$$u_1 + u_2 = \pm r.$$

Нельзя взять

$$u_1 + u_2 = +r \dots \dots (13).$$

Въ самомъ дѣлѣ изъ (13) имѣемъ

$$u_2 = r = -u_1$$

Замѣняя въ (10) r на $-r$ и полагая въ результатѣ $u = u_1$, получаемъ.

$$pu_1 + pu_2 + pr = \frac{1}{4} \left(\frac{p'u_1 + p'r}{pu_1 - pr} \right)^2 = 0,$$

чего не можетъ быть, а потому

$$u_1 + u_2 = -r,$$

$$u_1 + u_2 + r = 0,$$

т. е. сумма аргументовъ, удовлетворяющихъ уравненію

$$p'u = a,$$

всегда равна нулю.

§ 7. Приступимъ теперь къ опредѣленію голоморфной функціи $\tau(u)$, опредѣляемой трансцендентнымъ уравненіемъ

$$\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2(u)\tau^2(a)} = p(a) - p(u) \dots \dots (14).$$

Функції $\tau(\omega - u)$ и $\tau(\omega + u)$ имѣють одни и тѣже нули
положимъ

$$\begin{aligned}\tau(\omega + u) &= \tau(\omega - u), \\ \tau(u + 2\omega) &= -\tau(u).\end{aligned}$$

Дѣлая $a = \omega$ въ (15), получимъ

$$\left[\frac{\tau(\omega + u)}{\tau(u)\tau(\omega)} \right]^2 = p(u) - l_1.$$

Логарифмируя это уравненіе, получимъ

$$\log \tau(\omega + u) - \log \tau(u) - \log \tau(\omega) = \frac{1}{2} \log(pu - l_1).$$

Дифференцируя послѣднее уравненіе по u , находимъ

$$\frac{\tau'(\omega + u)}{\tau(\omega + u)} - \frac{\tau'(u)}{\tau(u)} = \frac{1}{2} \frac{p'(u)}{p(u) - l_1} \dots \dots (15).$$

Извѣстно, что

$$\zeta(\omega + u) = \zeta u + \zeta \omega + \frac{1}{2} \frac{p'u}{pu - l_1} \quad (1) \dots \dots (16)$$

Слѣдовательно

$$\frac{\tau'(\omega + u)}{\tau(\omega + u)} - \frac{\tau'(u)}{\tau(u)} = \zeta(\omega + u) - \zeta u - \zeta(\omega).$$

Отсюда видно, что двѣ функціи

$$\frac{\tau'(u)}{\tau(u)} \text{ и } \zeta(u)$$

могутъ отличаться только линейною функціею аргумента,
а потому

$$\frac{\tau'(u)}{\tau(u)} = \zeta(u) + 2\alpha u + \beta.$$

Но $\frac{\tau'(u)}{\tau(u)}$ есть функція нечетная, слѣдовательно

$$\beta = 0,$$

(¹) Halphen, «Traité des fonctions elliptiques», Т. 1, р. 138.

и мы получимъ

$$\frac{\tau'(u)}{\tau(u)} = \zeta(u) + 2\alpha u,$$

$$\frac{\tau'(u+\omega)}{\tau(u+\omega)} = \zeta(u+\omega) + 2\alpha u + 2\alpha\omega,$$

слѣдовательно

$$\frac{\tau'(u+\omega)}{\tau(u+\omega)} - \frac{\tau'(u)}{\tau(u)} = \zeta(u+\omega) - \zeta(u) + 2\alpha\omega,$$

а потому

$$2\alpha\omega = -\zeta(\omega), \quad 2\alpha = -\frac{\zeta(\omega)}{\omega},$$

слѣдовательно

$$\frac{\tau' u}{\tau u} = \frac{d}{du} \log \tau u = \zeta(u) - \frac{u\zeta(\omega)}{\omega}.$$

Функція $\sigma(u)$ Weierstrass'a опредѣляется уравненіемъ

$$\frac{d}{du} \log \sigma(u) = \zeta(u),$$

слѣдовательно

$$\frac{d}{du} \log \tau(u) = \frac{d}{du} \log \sigma(u) - \frac{u\zeta(\omega)}{\omega};$$

отсюда

$$\tau(u) = e^{-\frac{u^2\zeta(\omega)}{2\omega}} \sigma(u).$$

Функція $\tau(u)$ отличается отъ Якобіевой $\vartheta_1(u)$ только постояннымъ множителемъ ⁽¹⁾.

§ 8. Второй случай. Положимъ, что въ уравненіи

$$\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2(u)\tau^2(a)} = \varphi(a) - \varphi(u) \dots \dots (17)$$

⁽¹⁾ Halphen, «Traité des fonctions elliptiques», Т. 1, р. 251.

функція $\varphi(u)$ обладает только однимъ дѣйствительнымъ періодомъ π . Этимъ условіемъ мы дѣлаемъ переходъ въ область тригонометрическихъ функцій. Легко удостовѣриться въ слѣдующихъ свойствахъ $\tau(u)$ и $\varphi(u)$:

а) Функція $\tau(u)$ нечетная, а $\varphi(u)$ четная.

б) Нули функціи $\tau(u)$ заключаются въ общей формулѣ

$$u = m\pi,$$

гдѣ m число цѣлое, произвольное. Никакихъ другихъ нулей $\tau(u)$ не имѣетъ. Кромѣ того ясно, что $\tau(u)$ не обращается въ безконечность для дѣйствительнаго значенія аргумента.

в) Полагая

$$\tau'(0) = 1,$$

имѣемъ

$$\varphi'(u) = -\frac{\tau(2u)}{\tau^4(u)},$$

вслѣдствіе чего нули функціи $\varphi'(u)$ опредѣляются формулою

$$u = (2m + 1)\frac{\pi}{2},$$

а безконечности формулою

$$u = m\pi.$$

г) Между предѣлами

$$0 < u < \pi$$

функція $\tau(u)$ имѣетъ максимумъ, ибо $\tau(0) = \tau(\pi) = 0$, а $\tau'(0) = 1$; функція-же $\tau'(u)$ непрерывно убываетъ, и мы имѣемъ, очевидно,

$$\tau'(\pi) < 0.$$

На этомъ основаніи, по причинѣ непрерывности $\tau(u)$, заключаемъ, что, при переходѣ черезъ нуль, $\tau(u)$ мѣняетъ знакъ, т. е.

$$\tau(\pi + u) \text{ и } \tau(\pi - u)$$

должны имѣть противоположные знаки.

Съ другой стороны $\tau(\pi + u)$ и $\tau(\pi - u)$ имѣютъ одни и тѣже нули; поэтому можно написать

$$\tau(\pi - u) = A \cdot \tau(\pi + u),$$

гдѣ A постоянная величина; возьмемъ $A = -1$, тогда

$$\begin{aligned}\tau(\pi - u) &= -\tau(\pi + u), \\ \tau(u + 2\pi) &= \tau(u).\end{aligned}$$

Обратимся теперь къ уравненію

$$\varphi'(u) = \frac{\tau(2u)}{\tau^4(u)}.$$

При безконечно маломъ u , главный членъ разложенія по возрастающимъ степенямъ аргумента есть $-\frac{2}{u^3}$, слѣдовательно, если $u > 0$, то

$$\lim_{u \rightarrow 0} [\varphi'(u)] = -\infty.$$

При $u = \frac{\pi}{2}$ функція $\varphi'(u)$ обращается въ нуль; отсюда слѣдуетъ, что, въ предѣлахъ

$$0 < u < \frac{\pi}{2}$$

наша функція остается отрицательной.

На этомъ основаніи

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = -\frac{\tau(\pi - 2u)}{\tau^4\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} < 0,$$

а такъ какъ $\tau(\pi + 2u)$ и $\tau(\pi - 2u)$ имѣютъ противоположные знаки, то

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2} + u\right) > 0.$$

И такъ $\varphi'(u)$ въ предѣлахъ

$$\frac{\pi}{2} < u < \pi$$

остаётся положительною. Слѣдовательно $\varphi(u)$ при $u = \frac{\pi}{2}$ достигаетъ *минимума*. При безконечно маломъ u главный членъ разложенія $\varphi(u)$ есть $\frac{1}{u^2}$, а потому

$$\lim_{u \rightarrow 0} [\varphi(u)] = +\infty.$$

Положимъ вообще

$$\text{минимум } \varphi(u) = m;$$

тогда

$$\varphi(u) - m + 1 > 0$$

для всѣхъ значеній аргумента отъ 0 до $\pm\infty$. Двѣ функціи

$$F(u) = (\varphi'u)^2$$

и

$$fu = (\varphi u - m + 1)^2 (\varphi u - m)$$

имѣютъ одни и тѣ же нули, одни и тѣ же безконечности, а потому можно взять

$$(\varphi'u)^2 = 4(\varphi u - m + 1)^2 (\varphi u - m),$$

слѣдовательно

$$\varphi'u = -2(\varphi u - m + 1) \sqrt{\varphi u - m},$$

откуда, полагая $\varphi(u) = x$, имѣемъ

$$du = - \frac{dx}{2(x - m + 1) \sqrt{x - m}},$$

$$u = - \int_m^x \frac{dx}{2(x - m + 1) \sqrt{x - m}} + C.$$

Полагая $x=m$, имѣемъ

$$C = \frac{\pi}{2},$$

слѣд.

$$\int_m^x \frac{dx}{2(x-m+1)\sqrt{x-m}} = \frac{\pi}{2} - u,$$

$$\frac{\pi}{2} - u = \operatorname{arctg} \sqrt{x-m},$$

$$x = m + \cot^2 u$$

$$\varphi(u) = m + \cot^2 u.$$

Имѣемъ поэтому

$$\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2(u)\tau^2(a)} = \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 a} - \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 u}, \text{ или}$$

$$\frac{\tau(u+a)\tau(u-a)}{\tau^2(u)\tau^2(a)} = \frac{\operatorname{Sin}(u+a)\operatorname{Sin}(u-a)}{\operatorname{Sin}^2(u)\operatorname{Sin}^2(a)}.$$

Отсюда видно, что

$$\tau(u) = \operatorname{Sin} u,$$

$$\frac{d}{du} \log \tau(u) = \operatorname{Cot} u.$$

Итакъ функціи $p(u)$ Weierstrass'a соотвѣтствуетъ $(m + \operatorname{Cos}^2 u)$, функціи $\zeta(u)$ соотвѣтствуетъ $\operatorname{Cot} u$.

Неудивительно поэтому, что извѣстное уравненіе (*équation à trois termes*)⁽¹⁾ не есть исключительная принадлежность эллиптическихъ функцій, а легко распространяется на функціи тригонометрическія.

$$\text{Въ самомъ дѣлѣ, называя } \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 a} = A, \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 b} = B,$$

получаемъ

$$\frac{\operatorname{Sin}(a+b)\operatorname{Sin}(a-b)}{\operatorname{Sin}^2 a \operatorname{Sin}^2 b} = B - A.$$

(1) Halphen «*Traité des fonctions elliptiques*», Т. 1. p. 187.

Изъ тождества

$$(B-A)(D-C) + (B-C)(A-D) + (B-D)(C-A) = 0$$

получимъ прямо

$$\begin{aligned} & \sin(a+b)\sin(a-b)\sin(c+d)\sin(c-d) + \\ & + \sin(c+b)\sin(c-b)\sin(d-a)\sin(d+a) + \\ & + \sin(d+b)\sin(d-b)\sin(a+c)\sin(a-c) = 0. \end{aligned}$$

и, приняв за координаты формулы (17),

$$\frac{dx}{dx_0} = \frac{a}{a_0} \cdot \frac{a_0 - \theta}{a - \theta}$$

Преобразуя интеграл, получим

$$\frac{dx}{dx_0} = \frac{a}{a_0} \cdot \frac{a_0 - \theta}{a - \theta}$$

откуда

$$\omega = \frac{a}{a_0} \cdot \frac{a_0 - \theta}{a - \theta} + \varphi(\theta) \quad (19)$$

Так как $\varphi(\theta)$ есть известная функция, то, зная θ в плоскости θ , можно найти ω и, наоборот, зная ω , можно найти θ . Тогда формула (19) примет вид:

$$\omega = \frac{a}{a_0} \cdot \frac{a_0 - \theta}{a - \theta} + \varphi(\theta) \quad (20)$$

Эта формула и выражает закон распределения скорости течения.

